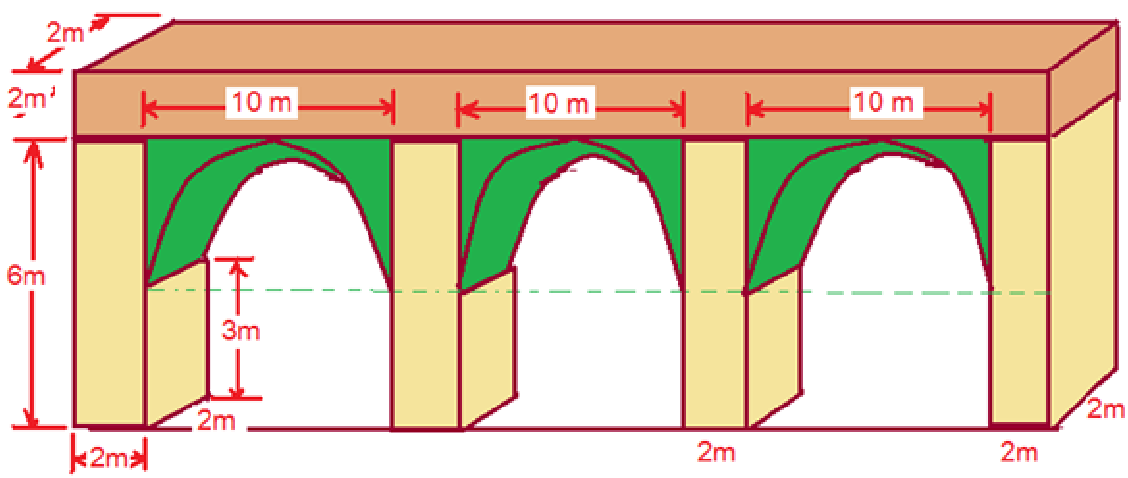
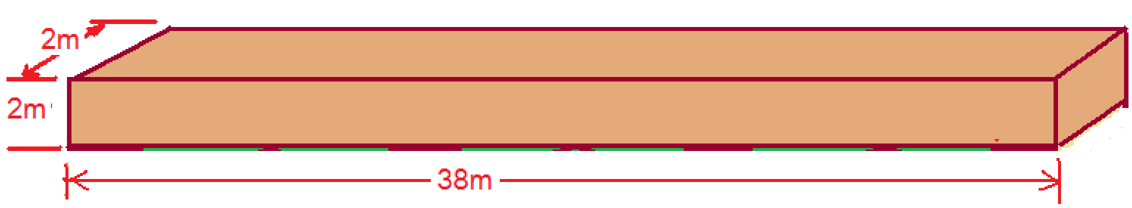
Consideremos el problema:

Usted es un ingeniero civil y se le ha encargado la tarea de construir un puente. Para ello necesita cubicar (dimensionar), para saber la cantidad de material necesario para hacer las cotizaciones y .los costos de operación.

Una vez establecido el diseño, plasmado en un plano, con sus dimensiones y cálculos estructurales, lo que viene enseguida es determinar la cantidad de metros cúbicos de material a emplear:

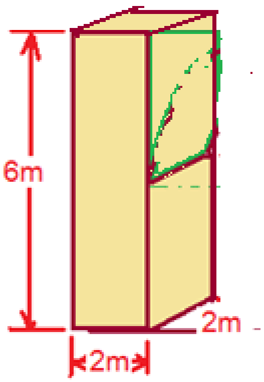


El cálculo de la viga superior no presenta mayores problemas, ya que su volumen corresponde al de un prisma recto cuyas dimensiones se indican:



$V_1 = 38m \times 2m \times 2m = 152m^3$

El calculo volumétrico de uno de los pilares se obtiene por;

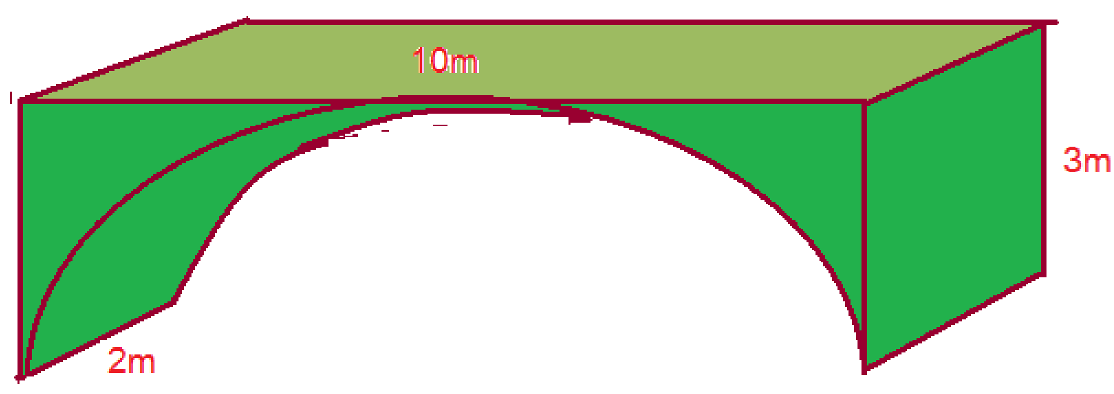


$V_{p=6m \times 2m \times 2m = 24m^3}$

Ahora bien, como son cuatro pilares iguales, el volumen total de ellos será:

$V_{4p} = 24m^3 \times 4 = 96m^3$

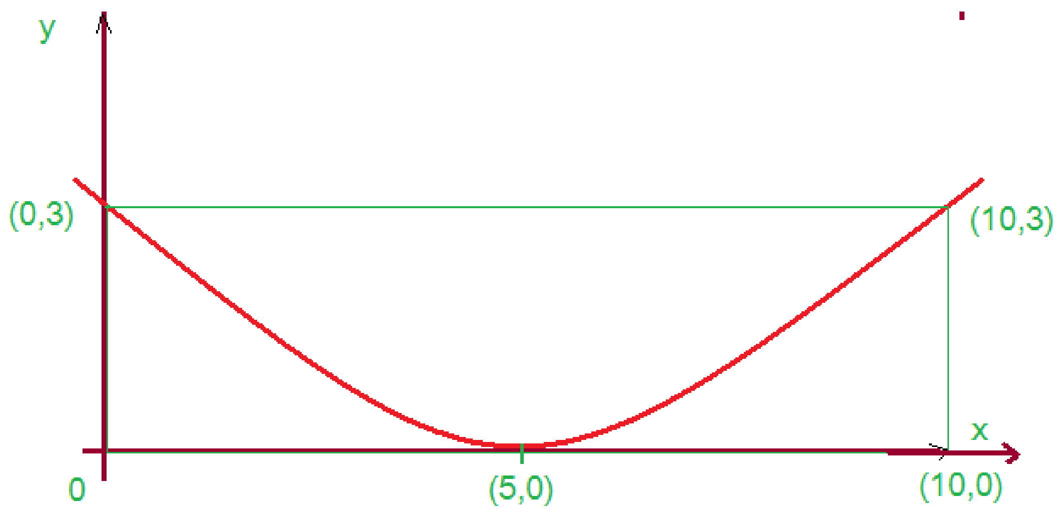
El tema es realmente ¿Cómo calcular el volumen de la figura volumétrica que se indica:



Para tal efecto solo consideraremos la superficie frontal. El producto de ella por el espesor, nos dará el volumen del arco volumétrico.

¿Qué modelo elegir?

¡Una parábola parece ser un modelo adecuado!



Determinando la ecuación cartesiana de la parábola, se obtiene:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$. Donde p: distancia focal   V (h, k), es el vértice de la cónica.

En este caso V= (5,0) , luego entonces la ecuación queda:

$(0-5)^2 = 4p(3-0)$

Ahora bien, como el punto (0,3) es punto de la curva, este debe satisfacer la ecuación, por lo que:

25 = 3 (4p)

$4p = \frac{25}{3}$, volviendo a reescribir la ecuación,

$$(x-5)^2 = \frac{25}{3}(y-0)$$

$$x^2 - 10x + 25 = \frac{25}{3}y$$

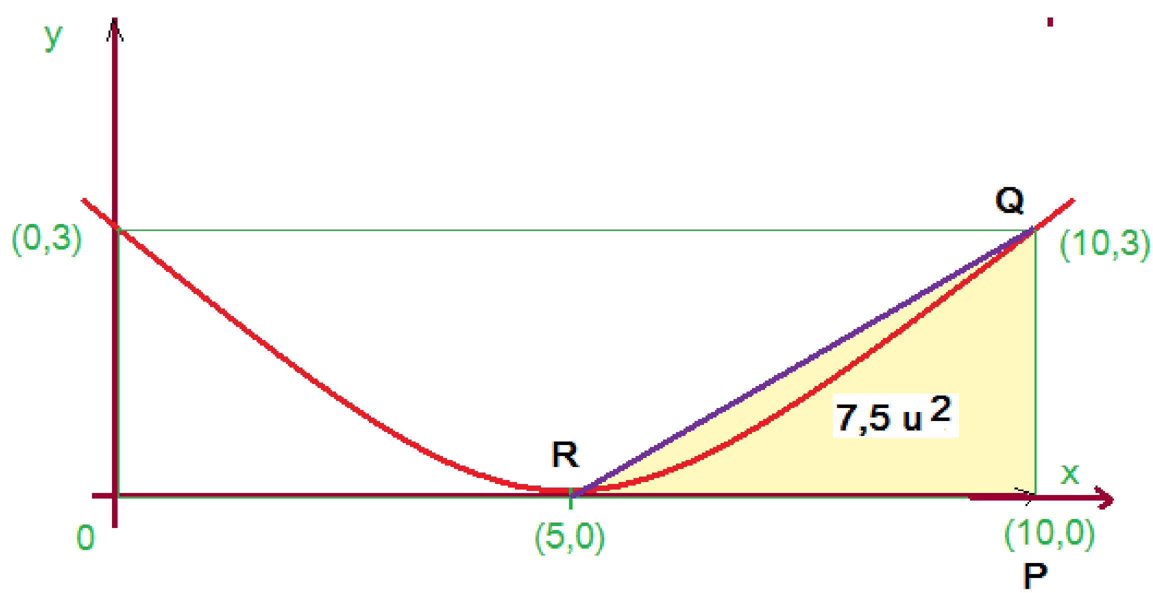
De modo que f(x) = $\frac{3}{25}x^2 - \frac{30}{25}x + \frac{75}{25}$

De otro modo más sencillo f(x) = $0{,}12x^2 - 1{,}2x + 3$

Que corresponde a la ecuación del modelo matemático elegido.

Primer criterio de estimación volumétrica.

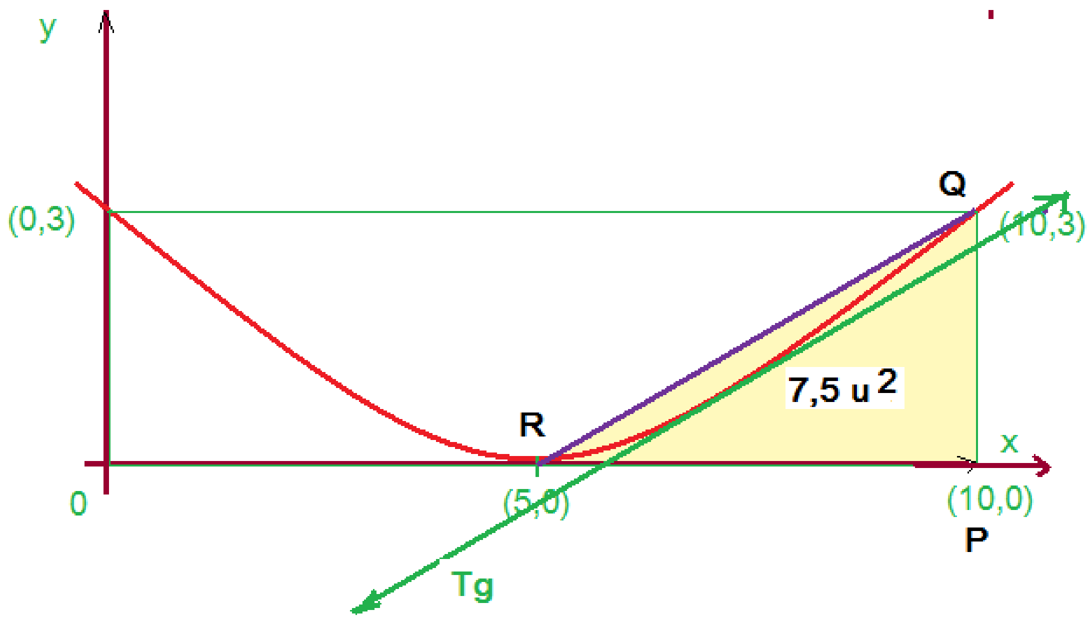
El aérea del triangulo RPQ corresponde a la mitad del área por exceso de la que queremos determinar. Toma el valor que se indica.



Si aplicamos el teorema del valor medio a esta cuerda, se obtiene que:

F´(x)= 0,24x-1,2, esta pendiente debe ser igual al valor de la pendiente de la cuerda, que equivale a $m_{QR} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Por lo tanto: 24x-1,2= 0,6, de donde resulta que x= 7,5



Y la ecuación de la tangente paralela a la cuerda corresponde a:

m = 0,6 , S= (7,5; 0)

y= 0,6 (x-7,5)

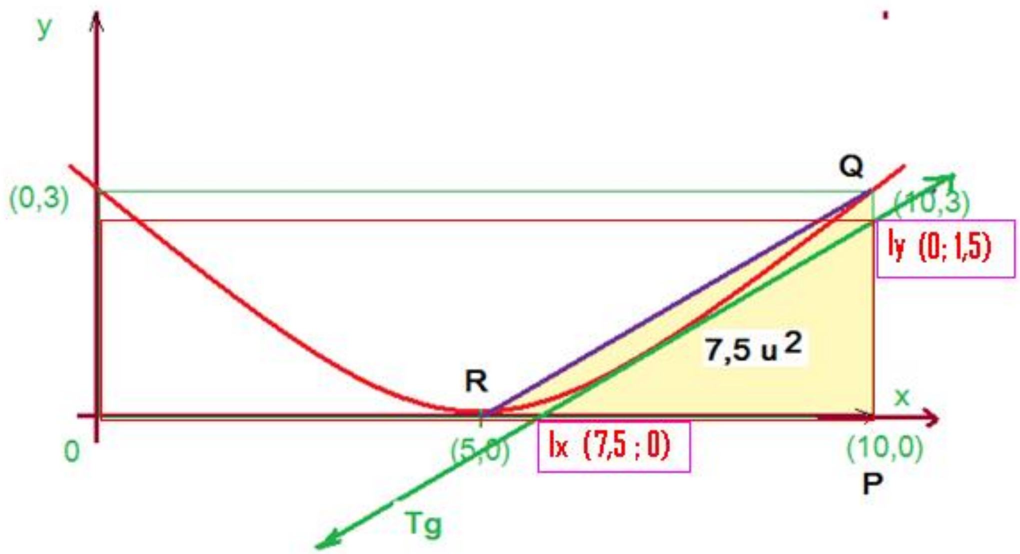
y= 0,6x-4,5

Si evaluamos para x=10, se obtiene Y= 0,6 x 10 – 4,5

Es consecuencia: y= 1,5

Por lo tanto los intercepto de la tangente con los ejes coordenados son:

$I_x = (7{,}5\ ;0) \qquad I_y = (0\ ;1{,}5)$



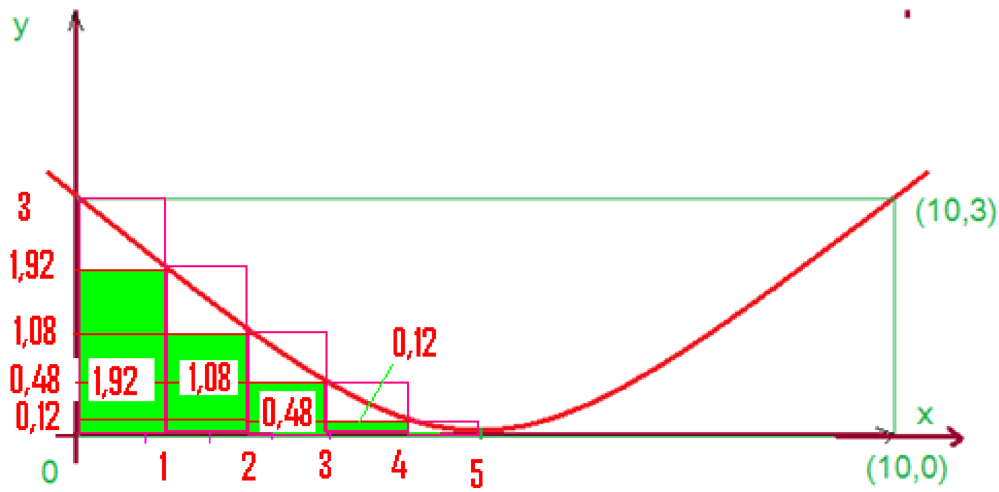
Entonces el área por defecto de la que encierra la curva bajo el eje de las abscisas es: $A_d = \frac{1}{2}(10 - 7{,}5) \times 1{,}5 = 1{,}875\ u^2$

De éste modo podemos estimar un promedio del área entre las calculadas. Esto parece ser una buena aproximación

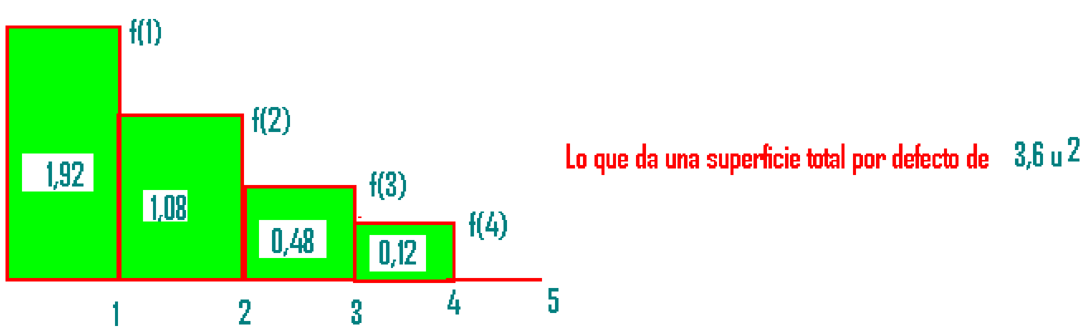
A== $\frac{1}{2}(7{,}5 + 1{,}875) = 4{,}6875u^2$

Otro modelo puede ser seccionar la curva en rectángulos de igual ancho, estableciendo una medida arbitraria. En este caso la base medirá 1 u, naturalmente que si se desea aproximar aún más el cálculo, esta medida elegida se puede tomar cada vez más pequeña.

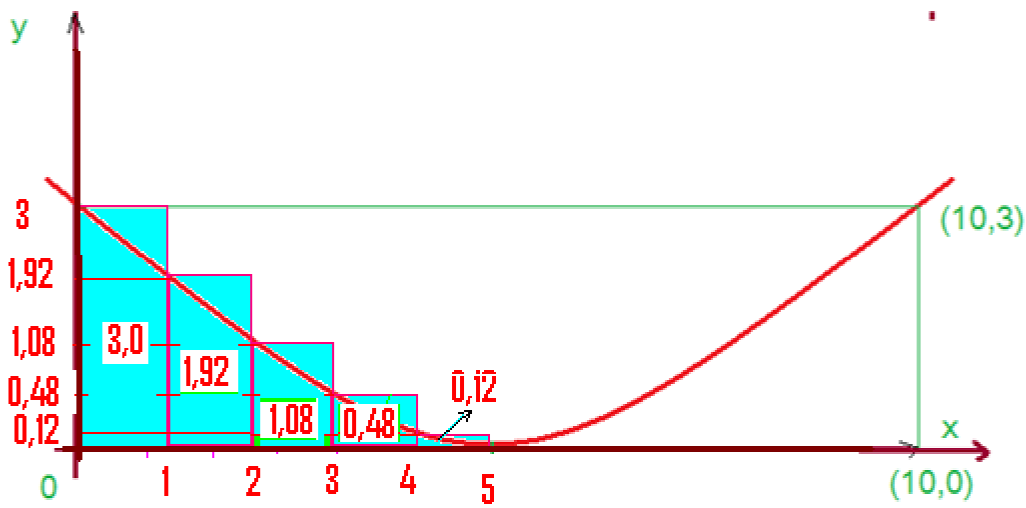
Así, basta con determinar las imágenes para cada abscisa de la sección de la base.



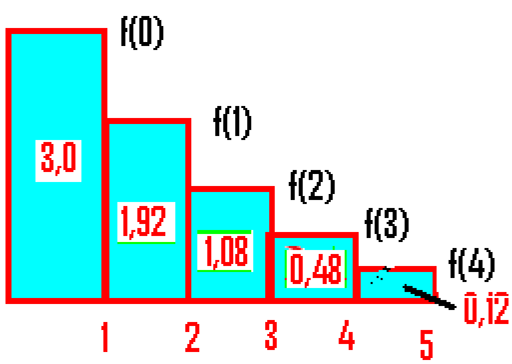
Entonces las superficies de cada rectángulo se calcula como se indica:



Ahora, calculamos la superficie por exceso y obtenemos:



Del mismo modo:



Cuya superficie por exceso da el valor de 6,6u^2

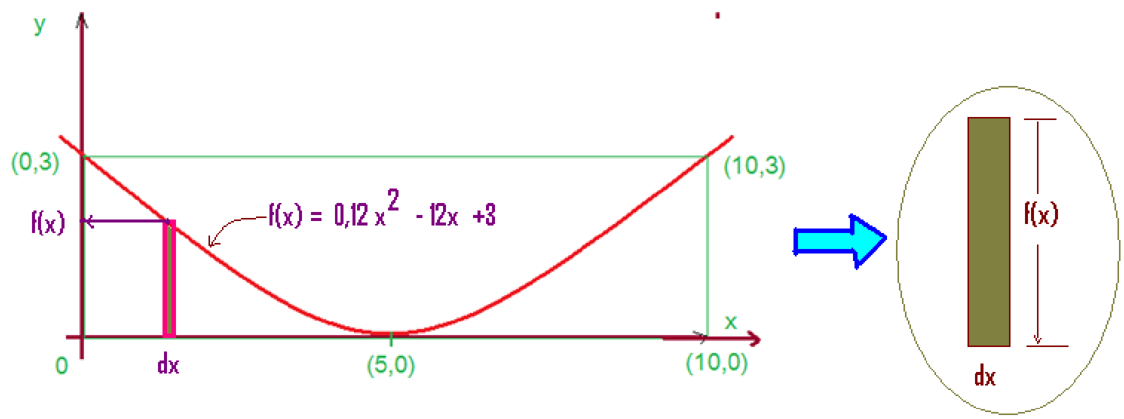
Un buen estimativo puede ser, determinar el promedio de las superficies por defecto y exceso. Esto es:

$$S = \frac{1}{2}(3{,}6 + 6.6) = 5{,}1u^2$$

Naturalmente que, si aumentamos cuanto queramos la cantidad de rectángulos, nos acercamos con más rigor al valor real de la superficie estimada.

¡Esto no es nuevo, corresponde a una representación de la serie de Riemann!

Ahora consideremos la siguiente apreciación:



Un diferencial "dx" de la función f(x),. Se obtiene entonces infinitésimos rectángulos, cuya dimensión de la base mide dx y cuya altura es prácticamente f(x)=$0{,}12x^2 - 1{,}2x + 3$.

Así, la suma de los infinitos rectángulos, nos dará la superficie comprendida por la curva que genera la gráfica de la función, con el eje OX.

Si definimos además, el intervalo $[0{,}5]$, se tiene el área mencionada para éste intervalo.

Esto es:

$$S_{[0,5]}=\int_0^5 (0{,}12x^2-1{,}2x+3)\,dx$$

$$S_{[0,5]}=\left(0{,}12\times\frac{x^3}{3}-1{,}2\times\frac{x^2}{2}+3x\right)_0^5$$

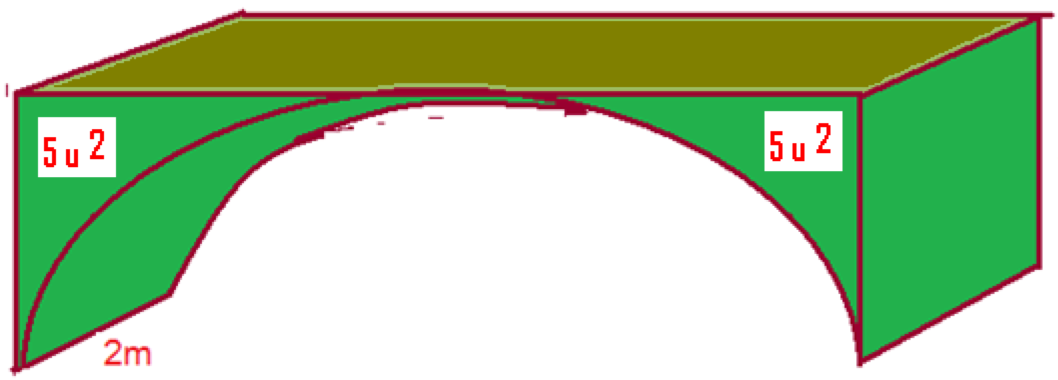
$$S_{[0,5]}=(0{,}04x^3-0{,}6x^2+3x)_0^5$$

$$S_{[0,5]}=\left(0{,}04x5^3-0{,}6x5^2+3x5\right)-(0)$$

$S_{[0,5]=5u^2}$

Como vemos, el valor obtenido por el método de los rectángulos ($5{,}1u^2$) (Riemann), se aproxima bastante a este último, que es el que corresponde

Finalmente podemos dar respuesta al problema propuesto



Si la superficie de la base es $10u^2$, es decir, para nuestro caso $10m^2$ y cuya altura es 2m, entonces el volumen será: $20m^3$

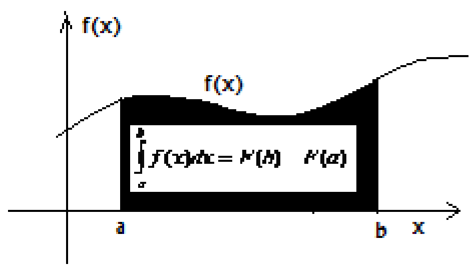
Ahora como son tres arcos iguales, el volumen de estos corresponde a: $60m^3$

En donde finalmente, el volumen total de esta sección del puente será:(152+96+60)m^3 = 308m^3

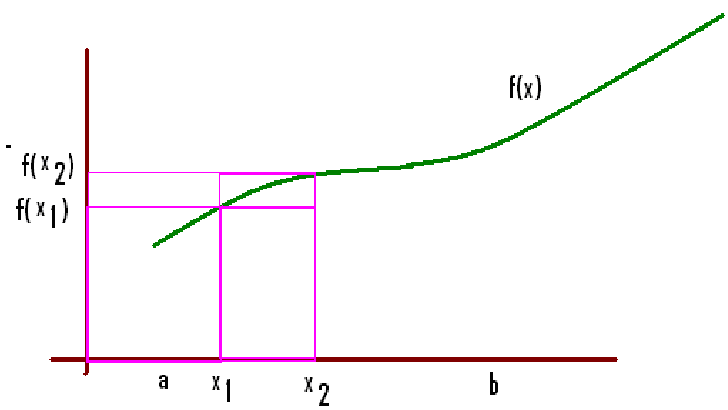
Finalmente podemos establecer que:

El teorema fundamental del cálculo señala: si una función f(x) es continua en el intervalo $[a,b]$, entones:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ .donde F es cualquier función tal que d(F(x))=f(x), para toda x en $[a,b]$. Por el **teorema fundamental del cálculo** sabemos que si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe la integral definida $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. El resultado de esta integral es igual al área bajo la curva f(x) representada en el plano.



En efecto. Análisis geométrico



$\Delta x = x_2 - x_1$

Si consideramos la funcion continua en el intervalo $[a\ ,\ b]$, para dos valores distintos de la preimagenes se tienen dos valores diferentes de la imagenes (que eventualmente pueden ser iguales)

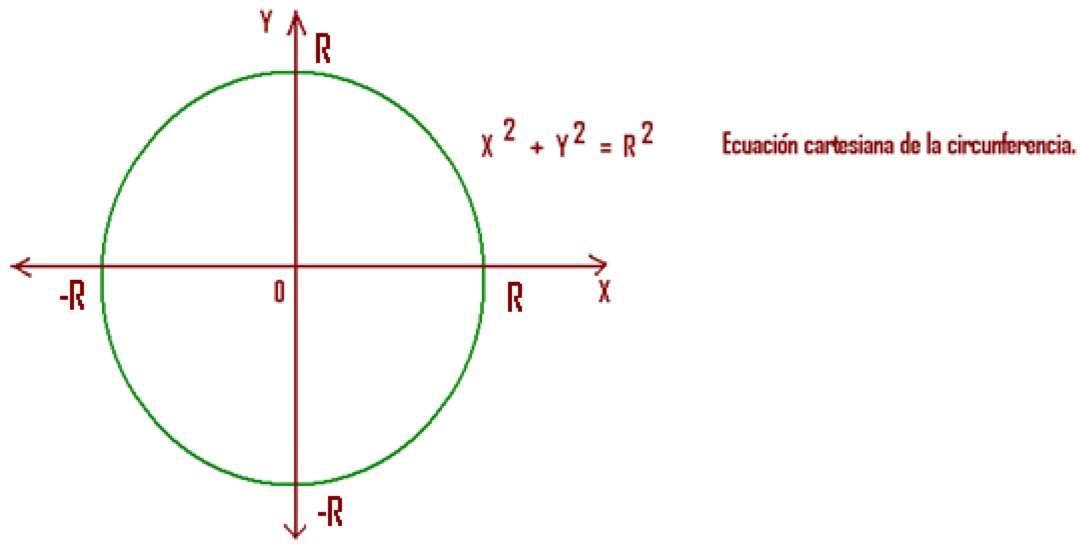
Esto define un rectangulo de base Δx

cuando esta diferencia tienda a cero , entonces : $f(x_1) = f(x_2)$ en este caso la superficie de cada uno de los rectangulos cuyas areas se expresan por $f(x)\ \Delta x = f(x)dx$

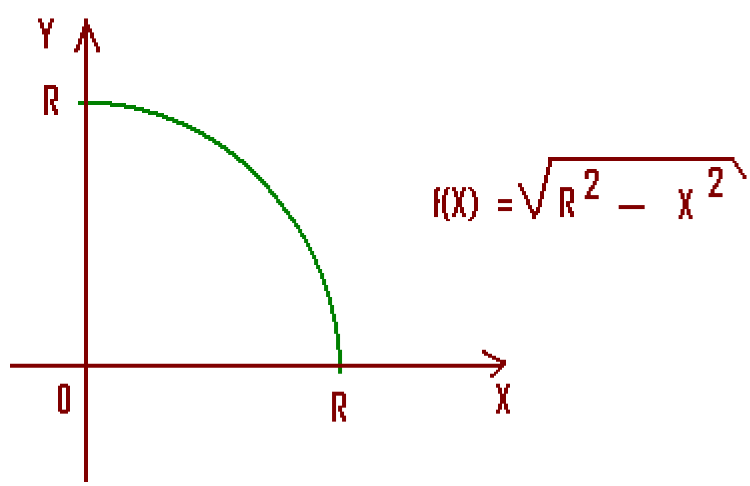
Si sumamos todos los rectangulo asi formados desde a hasta b tendremos la superficie comprendida por la curva de funcion f(x) , el eje x y la lineas verticales x=a y x =b

Otra aplicación importante es el la deducción de la formula del área de un circulo.

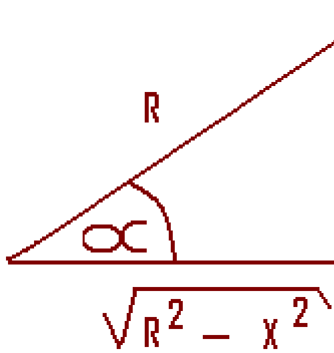
Para ello consideremos una circunferencia cuyo centro es el sistema de ejes cartesianos y cuyo radio es R. esto es:



Para simplificar la deducción consideraremos solo la cuarta de la circunferencia.



Transformando la función que representa la ecuación de la circunferencia cartesiana de la circunferencia a la forma polar , se obtiene:



De donde:

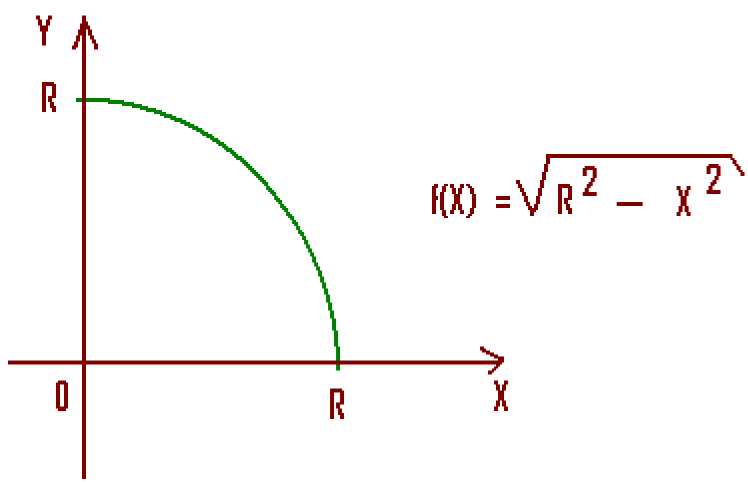
$sen\alpha = \frac{x}{R}$, $entonces\ x = R\ sen\alpha$

Sustituyendo entonces en la función:

f(x)=$\sqrt{R^2 - R^2 sen^2 x}$

Es decir: f(x)=$R\sqrt{1 - sen^2 x}$

Si consideramos ahora la diferencial, dx de la función, la suma de ellos nos dará la superficie de la cuarta parte del círculo.



En rigor:

$$A = \int_0^R R\sqrt{1 - sen^2 \propto}\, dx$$

Ahora bien como x= Rsen$\propto$

Entonces: dx= Rcos$\propto$ d$\propto$, sustituyendo este valor en la expresión anterior, obtenemos:

$$A = \int_0^{\kappa} R\sqrt{1 - sen^2 \propto}\, Rcos \propto d \propto$$

Que equivale a :

$$A = R^2 \int_0^{\kappa} cos^2 \propto \; d \propto$$

Esta expresión se puede escribir como

$$A = R^2 \int_0^{\kappa} cos \propto cos \propto \; d \propto$$

Si ahora hacemos que: u= cos$\propto$ y dv= $cos \propto d \propto$

Entonces: du= $-sen \propto d \propto \quad y \quad v = sen \propto$

Aplicando entonces la regla de la cadena:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$A = R^2 \int_0^{\kappa} cos^2 \propto d \propto = R^2 cos \propto \; sen \propto - R^2 \int_0^{\kappa} sen \propto (- sen \propto)d \propto$$

$$A = R^2 \int_0^{\kappa} cos^2 \propto d \propto = R^2 cos \propto \; sen \propto + R^2 \int_0^{\kappa} sen^2 \propto \; d \propto$$

$$A = R^2 \int_0^{\kappa} cos^2 \propto d \propto = R^2 cos \propto \; sen \propto + R^2 \int_0^{\kappa} (1 - cos^2 \propto) \; d \propto$$

$$A = R^2 \int_0^{\kappa} cos^2 \propto d \propto = R^2 cos \propto \; sen \propto + R^2 \int_0^{\kappa} \; d \propto - \int_0^{\kappa} cos^2 \propto d \propto$$

$$A = 2R^2 \int_0^{\kappa} cos^2 \propto d \propto = R^2 cos \propto \; sen \propto + R^2 \int_0^{\kappa} \; d \propto$$

$$A = 2R^2 \int_0^{\kappa} cos^2 \propto d \propto = R^2 cos \propto \; sen \propto + R^2 \propto$$

$$A = 2R^2 \int_0^{\kappa} cos^2 \propto d \propto = \frac{1}{2} R^2 (2cos \propto \; sen \propto) + R^2 \propto$$

$$A = 2R^2 \int_0^{\kappa} cos^2 \propto d \propto = \frac{1}{2} R^2 (sen2 \propto) + R^2 \propto$$

$$A = R^2 \int_0^{\kappa} cos^2 \propto d \propto = \frac{1}{4} R^2 (sen2 \propto) + \frac{1}{2} R^2 \propto$$

Ahora solo basta con cambiar las cotas cartesianas a coordenadas polares o angulares:

Se tiene que : $sen\alpha = \frac{x}{R}$, o bien $\propto = arcsen \frac{x}{R}$

Para x=0, $\propto = arcsen \frac{0}{R}$ n , o sea x= 0 rad.

Para x= R, $\propto = arcsen \frac{R}{R}$ n , o sea x= $\frac{\pi}{2}$ rad.

En consecuencia, la integral se evalúa para :

$$A = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 \propto d \propto = \frac{1}{4} R^2 (sen2 \propto) + \frac{1}{2} R^2 \propto$$

$$A = \left(\frac{1}{4}R^2 sen 2\alpha + \frac{1}{2}R^2\alpha\right) \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ \\ 0 \end{matrix}$$

Que evaluando de acuerdo a la regla de Barrow, resulta:

$$A = \left(\frac{1}{4}R^2 sen 2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}R^2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}R^2 sen 2 \times 0 + \frac{1}{2}R^2 \times 0\right)$$

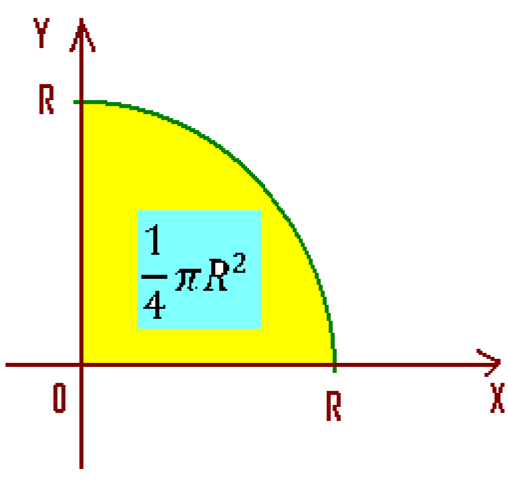
$$A = \left(\frac{1}{4}R^2 sen\, \pi + \frac{1}{2}R^2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}R^2 sen\, 0\right)$$

$$A = \left(0 + \frac{1}{2}R^2 \times \frac{\pi}{2}\right) - (0)$$

$$A = \left(\frac{1}{2}R^2 \times \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{4}\pi R^2$$

Que corresponde a la cuarta parte de la superficie del círculo:



En consecuencia: el área del circulo equivales a:

$$A = \pi R^2$$